UNIVERSIDAD
PANAMERICANA

Mecatrónica y
Control de
Sistemas

Control Moderno

Parte II - Análisis de sistemas no-lineales

Fundamentos de la Teoría de Lyapunov

Sistema dinámico no-lineal:

$$x' = f(x, t)$$

tiempo
variables de estado
función no-lineal

Con ley de control u:

$$x' = f(x, u, t)$$

Fundamentos de la Teoría de Lyapunov

Sistema autónomo:
Sistemas invariantes en el tiempo (*f* no depende de *t*)

$$x' = f(x)$$

Sistema no autónomo:
Caso contario $\quad x' = f(x, t)$

NOTA: Un sistema autónomo se puede volver no autónomo.

Puntos de equilibrio:
Un estado x* es un punto de equilibrio si x(t)=x* y permanece ahí.

Fundamentos de la Teoría de Lyapunov

La Teoría de Lyapunov se concentra en el análisis de la estabilidad de los sistemas y básicamente son 2 métodos:

a)Método de linealización
Análisis de estabilidad local alrededor de un punto de equilibrio.

b)Método directo
Análisis de estabilidad general a través de una función de energía variante en el tiempo.

Lyapunov I-Método de linealización

Este método formaliza la idea de que un sistema se comporta como su aproximación lineal alrededor de un punto de operación. Este método es la justificación de usar control lineal.

$$\dot{x} = f(x)$$

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0} x + \cancelto{0}{f_{hot}(x)}$$

$$\dot{x} = Ax$$

Aproximaciones lineales en x=0

$$\dot{x} = f(x,u)$$

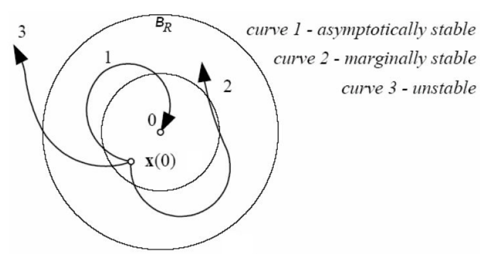
$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\u=0}} x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{\substack{x=0\\u=0}} u + \cancelto{0}{f_{hot}(x,u)}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Aproximaciones lineales en x=0, u=0

Lyapunov I - Estabilidad

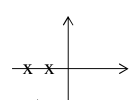
Suponga una región esférica B_R.



en control lineal

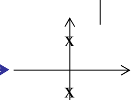
$$\dot{x} = Ax$$

- Si la trayectoria *x(t)* permanece siempre dentro de la esfera B_R y converge a 0, el punto de equilibrio es ***asintóticamente estable***.



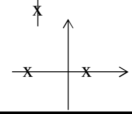
todos los valores de **A** están a la izquierda de jω

- Si el punto de equilibrio es estable pero no asintóticamente estable, es ***marginalmente estable***.



Al menos un valor de **A** está sobre jω

- Si la trayectoria *x(t)* sale de la esfera B_R, el punto de equilibrio es ***inestable***.



Al menos un valor de **A** está a la derecha de jω

Lyapunov II - Método Directo

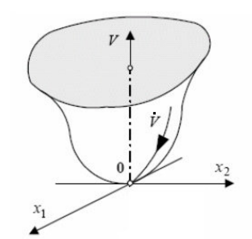
Función de energía: $V(x_1,x_2)=K(x_1)+P(x_2)$

Variación de energía: $\dot{V}(x_1,x_2)$

Lyapunov II - Teorema de estabilidad global

Función definida positiva
- Si $V(0)=0$ y para $x\neq 0$, $V(x)>0$

Función definida negativa
- Si $V(0)=0$ y para $x\neq 0$, $V(x)<0$



Teorema de estabilidad global

- $V(x)$ tiene que ser definida positiva
- $\dot{V}(x)$ tiene que ser definida negativa

Si la energía de un sistema se disipa continuamente (independientemente si el sistema es o no lineal), el sistema se estabiliza en un punto de equilibrio.

- Cero energía corresponde al punto de equilibrio (x=0)
- Estabilidad asintótica implica la convergencia de la energía a cero.
- Inestabilidad es el incremento de energía

¿Cómo escoger una función V(x)?

$x' = Ax$

Función candidata: $V(x) = x^T Px$ con P matriz identidad definida (+)

$$V'(x) = x'^T Px + x^T Px' = -x^T Qx$$

Con: $-Q = A^T P + PA$

Método: Obtener P de una Q definida positiva

a) Escoger Q definida positiva → matriz identidad

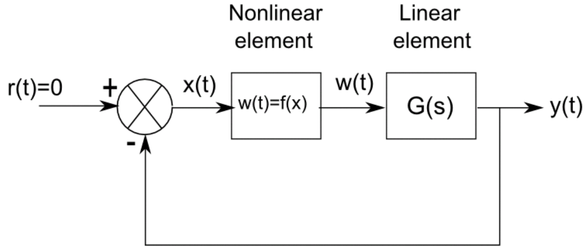
b) Resolver para P de: $-Q = A^T P + PA$

c) Verificar si P esta definida positiva

d) Si lo es, $V(x) = x^T Px$ es una función de Lyapunov y la estabilidad global está garantizada

Funciones Descriptivas

Método para analizar y predecir comportamientos no-lineales por aproximación. El objetivo de este método es detectar ciclos límites (que tienden a causar inestabilidad y poca precisión en el control). Cualquier sistema que pueda ser transformado en la siguiente configuración puede ser analizado por el método de funciones descriptivas.



Funciones Descriptivas

Existen 2 clases de sistemas que caen en este esquema:

1) **Casi-lineales:** Sistemas que contienen no-linealidades como saturación, zona muerta, juego, etc. pero que aparte de eso son lineales.
2) **Genuinamente no-lineales**: cuya dinámica se puede transformar en la forma esquemática de funciones descriptivas.

Funciones Descriptivas

Para aplicar funciones descriptivas el sistema tiene que satisfacer:

1. Debe existir un solo componente no-lineal

Si hay 2 o más componentes no-lineales, se tienen que juntar. Si no es posible, retener solo uno e ignorar el resto.

2. El componente no-lineal es invariante en el tiempo

Solo sistemas autónomos.

Funciones Descriptivas

3. **Al usar una entrada senoidal x=sin(ωt), solo la componente fundamental $\omega_1(t)$ de la salida ω (t) tiene que ser considerada.**
   El sistema se resuelve por aproximación. Usando series de Fourier, los harmónicos de orden superior se desprecian para retener:

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\,d(\omega t)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\cos(n\omega t)\,d(\omega t)$$

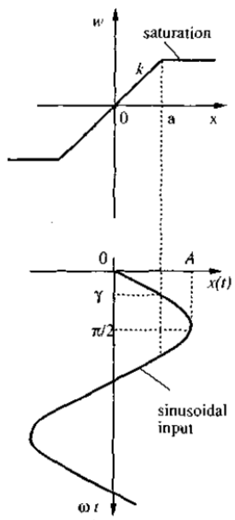
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w(t)\sin(n\omega t)\,d(\omega t)$$

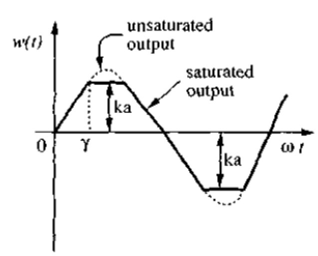
$$\boxed{w(t) \approx w_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}$$

4. La no-linealidad debe ser impar
La gráfica de la no-linealidad *f(x)* debe ser simétrica respecto al origen.

Funciones Descriptivas de no-linealidades comunes

Saturación

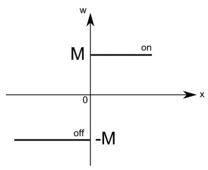




$$N(A) = \frac{2k}{\pi}\left[\sin^{-1}\frac{a}{A} + \frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right]$$

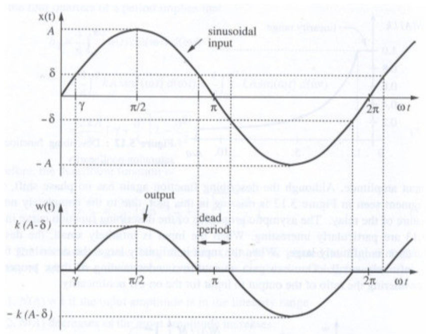
Funciones Descriptivas de no-linealidades comunes

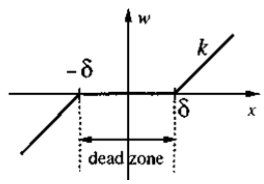
Relays



$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

Zona muerta





$$N(A) = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{\delta}{A} - \frac{\delta}{A}\sqrt{1-\frac{\delta^2}{A^2}}\right]$$

Fenómenos Idealizados de Almacenamiento de Energía

ENERGÍA POTENCIAL GENERALIZADA

Domino Físico	Fenómeno	Vble de energía Vble de co-energía	Coeficiente Parámetro	Energía Potencial Coenergía potencial	Relación característica
Mecánica de Traslación	Deformación elástica en traslación	Deformación **x** Fuerza **F** en **x**	Módulo de elasticidad **E** Compliance **C** C=1/k	$E_p = \frac{x^2}{2C}$ $E_p^* = \frac{CF^2}{2}$	$F = \frac{dE_p}{dx} = \frac{x}{C}$ $x = \frac{dE_p^*}{dF} = CF$
Mecánica de rotación	Deformación elástica en rotación	Deformación angular **θ** Torque **τ** en **θ**	Módulo de elasticidad **G** Compliance en torsión	$E_p = \frac{\theta^2}{2C}$ $E_p^* = \frac{C\tau^2}{2}$	$\tau = \frac{dE_p}{d\theta} = \frac{\theta}{C}$ $\theta = \frac{dE_p^*}{d\tau} = C\tau$
Eléctrico	Electrificación de un material	Carga **q** Voltaje **V** en **q**	Permitividad **ε** Capacitancia **C** C= εS	$E_p = \frac{q^2}{2C}$ $E_p^* = \frac{CV^2}{2}$	$V = \frac{dE_p}{dq} = \frac{q}{C}$ $q = \frac{dE_p^*}{dV} = CV$
Magnético	Magnetización de un material	Flujo magnético **φ** Fuerza magnetomotriz **M**	Permeabilidad μ Permeancia Λ Λ= μS	$E_p = \frac{\varphi^2}{2\Lambda}$ $E_p^* = \frac{\Lambda M^2}{2}$	$M = \frac{dE_p}{d\varphi} = \frac{\varphi}{\Lambda}$ $\varphi = \frac{dE_p^*}{dM} = \Lambda M$
Hidráulico (fluido incompresible)	Atracción universal	Volumen **V** Presión $\mathbf{p_g}$ debido a **V**	Masa volumétrica **ρ** Capacidad **S/ ρg**	$E_p = \frac{\rho g V^2}{2S}$ $E_p^* = \frac{S p_g^2}{2\rho g}$	$p_g = \frac{dE_p}{dV} = \frac{\rho g V}{S}$ $V = \frac{S}{\rho g} p_g$

ENERGÍA CINETICA GENERALIZADA

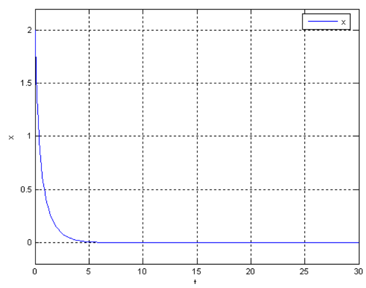
Domino Físico	Fenómeno	Vble de energía Vble de co-energía	Coeficiente Parámetro	Energía Cinética Coenergía cinética	Relación característica
Mecánica de Traslación	Movimiento en traslación	Cantidad de movimiento **p** Velocidad **x'**	Masa volumétrica **ρ** Masa **m**	$E_c = \frac{p^2}{2m}$ $E_c^* = \frac{mx'^2}{2}$	$x' = \frac{dE_c}{dp} = \frac{p}{m}$ $p = \frac{dE_c^*}{dx'} = mx'$
Mecánica de rotación	Movimiento en rotación (alrededor de un eje fijo)	Momento cinético **σ** Velocidad angular **θ'**	Masa volumétrica **ρ** Momento de inercia **J**	$E_c = \frac{\sigma^2}{2J}$ $E_c^* = \frac{J\theta'^2}{2}$	$\theta' = \frac{dE_c}{d\sigma} = \frac{\sigma}{J}$ $\sigma = \frac{dE_c^*}{d\theta'} = J\theta'$
Magnético (visto desde dominio eléctrico)		Flujo total **λ** Corriente **i**	Inductancia **L** $L = \frac{N^2}{R}$	$E_c = \frac{\lambda^2}{2L}$ $E_c^* = \frac{Li^2}{2}$	$i = \frac{dE_c}{d\lambda} = \frac{\lambda}{L}$ $\lambda = \frac{dE_c^*}{di} = Li$
Hidráulico	Movimiento del fluido	Momento generalizado hidráulico **Γ** Débito volumétrico **q**	Masa volumétrica **ρ** Inercia **I** $I = \frac{\rho\ l}{S}$	$E_c = \frac{S\Gamma^2}{2\rho\ l}$ $E_c^* = \frac{\rho\ l}{2S} q^2$	$q = \frac{dE_c}{d\Gamma} = \frac{S\Gamma}{\rho l}$ $\Gamma = \frac{dE_c^*}{dq} = \frac{\rho\ l}{S} q$

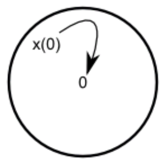
Practica 2: Lyapunov, estabilidad, puntos de equilibrio,…

1.- Para los siguientes sistemas: (a) encuentre los puntos de equilibrio e (b) indique si son estables en el sentido de Lyapunov.

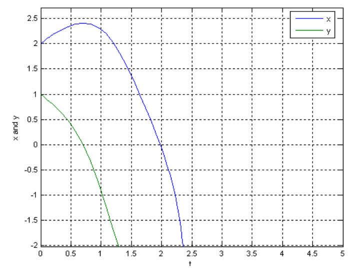
(a) $x' = -(1 + sen^2 x)x$

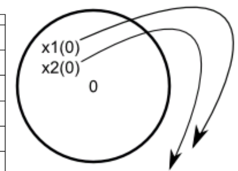
(b) $x_1' = x_2$
$x_2' = -x_1 + (1 - x_1)^2 x_2$





PE=0, Estable





No existe PE, Inestable

(c) $x'' + x'^3 + x^5 = x^4 sen^2 x$

(d) $x' = -x^3 + sen^4 x$

(e) $x' = (5 - x)^5$

(f) $x'' + x'^5 + x^7 = x^2 sen^8 x \cos^2 3x$

2.- Encuentre la función de Lyapunov que asegure la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas:

(a) $x_1' = 4x_2$
$x_2' = -8x_1 - 12x_2$

Sol: A=[0 4;-8 -12]
Q=[1 0; 0 1] %Definida positiva
P= lyap(A',Q) →

0.3125	0.0625
0.0625	0.0625

V(x)=x^TPx → $5/16\ x1^2 + 1/8\ x1\ x2 + 1/16\ x2^2$

(b) $x_1' = x_2$
$x_2' = x_3$
$x_3' = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$

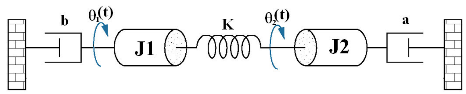
(c) $x_1' = -3x_1^2 + 4x_2$
$x_2' = -x_1 - x_2 - x_2^2$

(d) $x_1' = -2x_1$
$x_2' = 2x_1 - 2x_2$

(e) Motor DC

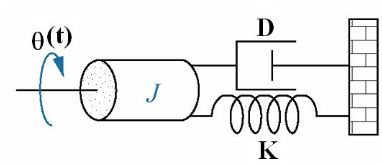
$J=0.01$
$b=0.1$
$k=0.01$
$R=1$
$L=0.5$

(f)



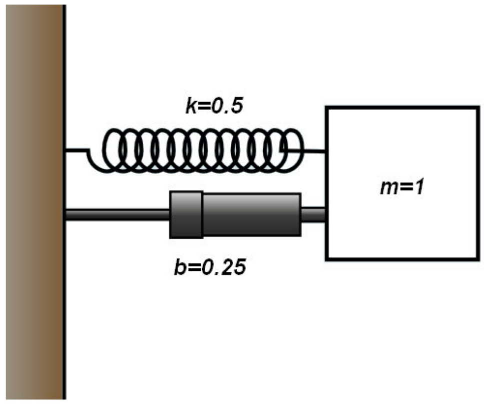
$J_1=1$
$J_2=2$
$b=32$
$k=64$
$a=32$

3.- Para el siguiente sistema, encuentre (a) la expresión de la dinámica del sistema, (b) la expresión de energía de Lyapunov y (c) la expresión de variación de energía suponiendo 2 casos: 1) el resorte es lineal, 2) el resorte es no lineal y está definido por $F=k_1\theta+k_2\,\theta+k_2\,\theta^2$.



Practica 3: Funciones de energía y descripción de funciones

1.- Considere el sig. sistema masa resorte amortiguador. Obtenga la representación gráfica de: (a) la energía cinética, (b) la energía potencial, (c) la función de energía de Lyapunov y (d) la variación de energía del sistema.



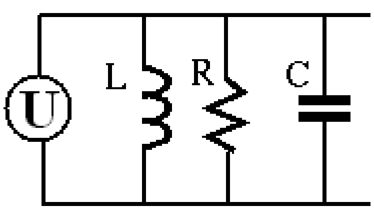
2.- Obtenga la representación gráfica de: (a) la función de energía de Lyapunov y (b) la variación de energía del sistema.

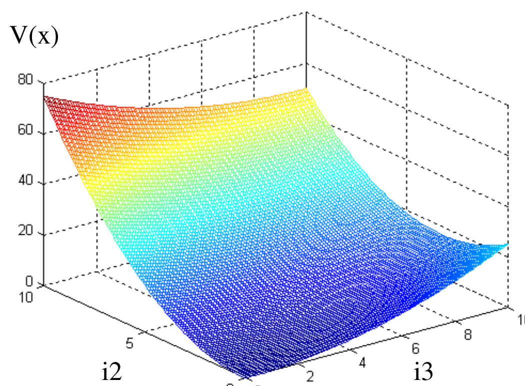
$$x_1' = 4x_2$$
$$x_2' = -8x_1 - 12x_2$$

Sol: $V(x) = \frac{1}{16}\left[(5x_1 + x_2)x_1 + (x_1 + x_2)x_2\right]$

$V'(x) = -16\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

3.- Para el sig. circuito obtenga la representación gráfica de la función de energía de Lyapunov.
L=0.5, C=1e-6, R=1K



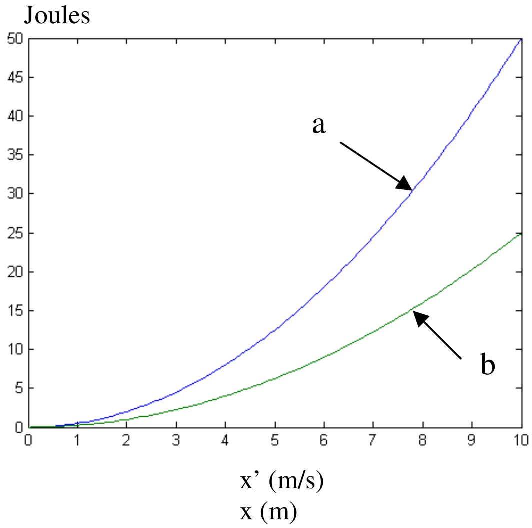


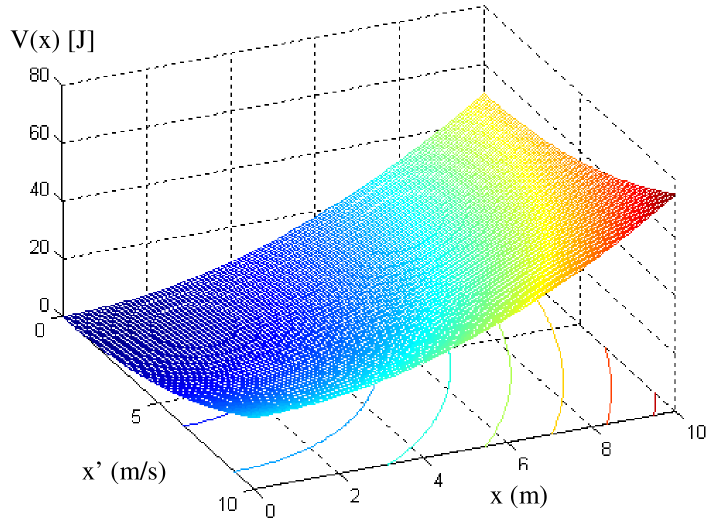
4.- Considere $G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$ en lazo cerrado con retroalimentación unitaria.
Para una entrada senoidal (A=5, f=1rad/s), aproxime por el método de descripción de funciones:
(a) Saturación de ±1
(b) Relay de ±1
(c) Zona muerta entre ±1

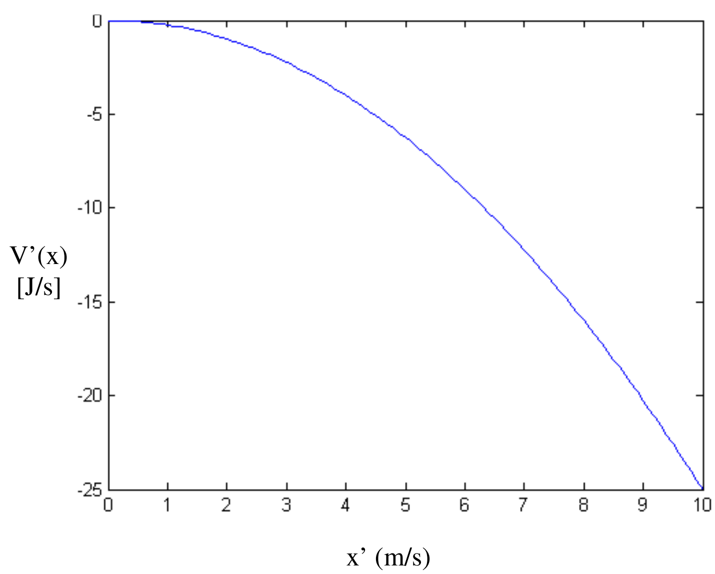
5.- Compare $f(x) = x + \frac{x^3}{2}$ con su aproximación lineal para $G(s) = \frac{1}{s+2}$.

Respuestas

1)







2)